Capitolo 0 - Strumenti di base

Indice

1 Insiemi numerici

1.1 La nozione di insieme

Il concetto di **insieme** viene comunemente utilizzato nella vita di tutti i giorni e ci accompagna fin dai primi anni di vita. Con la parola insieme intendiamo una collezione di oggetti, gli **elementi** dell'insieme, i quali sono solitamente raggruppati perché hanno una caratteristica o proprietà comune. Potremmo fare svariati esempi, si pensi all'insieme delle persone partecipanti ad una maratona, delle lettere dell'alfabeto e così via. Noi saremo particolarmente interessati agli insiemi numerici:

- $\mathbb{N}$, l'insieme dei numeri **naturali**;
- $\mathbb{Z}$, l'insieme dei numeri **interi**;
- $\mathbb{Q}$, l'insieme dei numeri **razionali**;
- $\mathbb{R}$, l'insieme dei numeri **reali**;
- $\mathbb{C}$, l'insieme dei numeri **complessi**.

Gli insiemi sono solitamente indicati con lettere maiuscole, mentre gli elementi con lettere minuscole. Gli insiemi possono essere rappresentati elencando tutti gli elementi, graficamente con punti all'interno di con una curva chiusa oppure specificando le proprietà che contraddistinguono gli elementi. Quest'ultimo modo è quello più semplice da utilizzare: se volessimo infatti rappresentare l'insieme A dei numeri naturali più piccoli di 100 potremmo semplicemente scrivere

$$\{n \in \mathbb{N} : n < 100\} \tag{1}$$

dove il simbolo $\in$ significa "appartiene" ed è usato per indicare che un certo elemento fa parte di un insieme. L'espressione (1) si legge "l'insieme degli n appartenenti all'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ tali che n è minore di 100".
Un insieme privo di elementi è detto **insieme vuoto** ed è indicato col simbolo $\emptyset$.
Dati due insiemi A e B si dice che A è un **sottoinsieme** di B ($A \subseteq B$) se ogni elemento di A appartiene a B. Allo stesso modo si può dire che B contiene A ($B \supseteq A$). Se in B esiste almeno un elemento che non appartiene ad A allora si dice che A è un **sottoinsieme proprio** di B ($A \subset B$). Quando valgono contemporaneamente le relazioni $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ i due insiemi coincidono, $A = B$. Ad esempio, tra gli insiemi numerici valgono le seguenti relazioni:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

È possibile definire delle operazioni tra insiemi, le principali sono le seguenti.

- **Unione**

$$A \cup B = \{x : x \in A \ \vee^1 \ x \in B\}$$

- **Intersezione**

$$A \cap B = \{x : x \in A \ \wedge^2 \ x \in B\}$$

- **Differenza**

$$B - A = \{x : x \in B \ \wedge \ x \notin A\}$$

Sia dato un insieme E tale che $A \subseteq E$, allora si definisce il **complementare** di A in E nel seguente modo

$$\overline{A} = E - A$$

Definizione 1. *Siano A e B due insiemi. Si dice* **prodotto cartesiano** *di A e B (si indica con $A \times B$) l'insieme i cui elementi sono le* **coppie ordinate** *(a, b), dove a varia tra tutti gli elementi di A e b tra quelli di B:*

$$A \times B = \{(a, b) \, : \, a \in A, \, b \in B\}$$

Attenzione: il prodotto cartesiano non è commutativo, in generale infatti $A \times B \neq B \times A$. Il prodotto cartesiano a cui saremo maggiormenti interessati sarà $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ovvero l'insieme di coppie ordinate di numeri reali. Il nostro interesse deriva dal fatto che è possibile definire una corrispondenza biunivoca tra questo insieme e i punti di un piano. Consideriamo in un piano due rette orientate x e y ortogonali tra loro ed aventi il punto O in comune. Su ciascuna di esse possiamo definire un sistema di riferimento con origine nel punto comune O assegnando un'unità di misura. Le rette x e y si chiamano allora **assi cartesiani**: la retta x sarà chiamata **asse delle ascisse** e la retta y **asse delle ordinate**. Questo sistema di riferimento viene solitamente indicato con Oxy. Consideriamo un punto Q del piano e tracciamo per Q le parallele agli assi coordinati: tali parallele incontreranno gli assi in due punti U (sull'asse x) e V (sull'asse y) (le **proiezioni** del punto Q sugli assi coordinati) ai quali saranno associati rispettivamente il numero reale x_Q ed il numero reale y_Q. Quindi il punto Q risulterà univocamente determinato da due numeri reali, che saranno chiamati le **coordinate cartesiane ortogonali** del punto Q: in particolare il numero x_Q sarà chiamato **ascissa** di Q, mentre il numero y_Q sarà chiamato **ordinata** di Q. Scriveremo $Q\,(x_Q, y_Q)$: in questo modo ad ogni punto del piano resta univocamente associato un elemento del prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, l'origine O ha coordinate $(0, 0)$, un punto sull'asse x ha coordinate $(a, 0)$, con $a \in \mathbb{R}$, mentre un punto sull'asse y ha coordinate $(0, b)$, con $b \in \mathbb{R}$. Gli assi cartesiani dividono il piano in quattro regioni, dette **quadranti**, numerate a partire da quella individuata dai semiassi positivi e procedendo in senso antiorario. Quindi, per sapere a quale quadrante appartiene un dato punto è sufficiente esaminare i segni delle sue coordinate: il punto $P(5, 1)$ ha entrambe le coordinate positive e quindi appartiene al I quadrante, mentre il punto $R(-1, -2)$ ha entrambe le coordinate negative ed appartiene al III quadrante.

[1] Simbolo che indica il connettivo logico "o".
[2] Simbolo che indica il connettivo logico "e".

Il piano cartesiano è uno strumento fondamentale per la trattazione geometrica di problemi algebrici (e viceversa naturalmente) e nel resto del capitolo, così come nell'intero volume, sarà costantemente utilizzato.

1.2 Numeri naturali e interi

I primi numeri che si incontrano nella nostra vita sono sicuramente i **numeri naturali**, chiamati anche *interi non negativi* (gli *interi positivi* sono i numeri naturali senza lo 0, che indicheremo con il simbolo $\mathbb{N}_0$): sono i numeri utilizzati per contare oggetti, come $0, 1, 2, 3, \ldots$. L'insieme dei numeri naturali è indicato con $\mathbb{N}$. I **numeri interi** o *interi relativi* sono i numeri $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$, ovvero i numeri naturali con i loro opposti (ovviamente 0 coincide con il suo opposto). Il simbolo che denota l'insieme dei numeri interi è $\mathbb{Z}$.

Definizione 2. *Dati due interi a e b si dice che a divide b (a è un divisore di b), e si scrive $a \mid b$, se esiste un intero c tale che $b = a\,c$.*

Definizione 3. *Dati due interi a e b si dice* **divisore comune** *di a e b un intero c tale che $c \mid a$ e $c \mid b$.*

Definizione 4. *Dati due interi a e b, un intero d è detto* **Massimo Comun Divisore (MCD)** *di a e b se*

i) è un divisore sia di a che di b;

ii) tra tutti i divisori comuni di a e b è quello più grande.

Definizione 5. *Dati due interi a e b, un intero m è detto* **minimo comune multiplo (mcm)** *di a e b se*

i) è un multiplo sia di a che di b;

ii) tra tutti i multipli comuni di a e b è quello più piccolo.

Definizione 6. *Un numero* **primo** *è un numero naturale maggiore di 1 divisibile solo per 1 e per se stesso: sono numeri primi, ad esempio, 2, 3, 5, 7, ma non il 9. Due numeri interi sono* **primi tra loro** *se non hanno fattori comuni eccetto il numero 1.*

Ad esempio, 12 e 25 sono primi tra loro (non hanno fattori in comune), mentre 56 e 49 non lo sono perché hanno 7 come fattore comune (7 divide entrambi i numeri).

1.3 Numeri razionali e reali

I **numeri razionali** sono quei numeri che è possibile esprimere attraverso frazioni a/b di numeri interi, con il denominatore b diverso da 0. Ad esempio sono numeri razionali (i numeri interi sono razionali):

$$1, \quad -2, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{7}{2}, \quad -\frac{23}{25}$$

Esistono infinite frazioni che rappresentano lo stesso numero razionale: ad esempio $3/4$, $9/12$, $21/28$ rappresentano il numero 0.75, e ne potremmo trovare infinite altre. Due numeri razionali, espressi dalle frazioni a/b e c/d, sono uguali quando si ha $a\,d = c\,b$. Da questo si deduce che una frazione può essere moltiplicata a numeratore e denominatore per uno stesso numero diverso da 0 e non cambiare il suo valore.
L'insieme dei numeri razionali, indicato con $\mathbb{Q}$, contiene quindi i numeri con sviluppo decimale finito oppure infinito periodico.
L'estensione dei razionali che include i numeri con uno sviluppo decimale infinito non periodico è l'insieme dei **numeri reali**, che si indica con $\mathbb{R}$. Tra di essi troviamo, ad esempio, i seguenti numeri:

$$2, \quad -11, \quad \frac{3}{20}, \quad 0, \quad 5.789, \quad \sqrt{7}, \quad \pi$$

I numeri razionali sono numeri reali; esistono però dei numeri reali che non sono razionali (**numeri irrazionali**), che non possono cioè essere espressi sotto forma di frazione, come ad esempio $\sqrt{7}$ e π. Riassumendo, quindi, l'insieme dei numeri reali contiene l'insieme dei numeri razionali, il quale contiene l'insieme dei numeri interi, il quale contiene l'insieme dei numeri naturali. D'ora in avanti, quando parleremo di numero, se non diversamente specificato, si intenderà un numero reale.

1.3.1 Proprietà algebriche dei numeri reali

Consideriamo tre numeri reali x,y e z. Valgono allora le seguenti proprietà relative alle operazioni di addizione ($\mathcal{A}$) e moltiplicazione ($\mathcal{M}$).

1. Proprietà commutativa
$$(\mathcal{A}) \quad x + y = y + x \qquad\qquad (\mathcal{M}) \quad x \cdot y = y \cdot x$$
2. Proprietà associativa
$$(\mathcal{A}) \quad x + (y + z) = (x + y) + z \qquad\qquad (\mathcal{M}) \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$
3. Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione
$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \qquad\qquad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$
4. Proprietà dell'elemento neutro (il numero 0 è l'elemento neutro dell'addizione, mentre il numero 1 è l'elemento neutro della moltiplicazione)
$$(\mathcal{A}) \quad x + 0 = 0 + x = x \qquad\qquad (\mathcal{M}) \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$
5. Proprietà dell'opposto e del reciproco
($\mathcal{A}$) Per ogni numero reale $x \neq 0$ esiste un numero reale $-x$, chiamato **opposto** di x, tale che
$$x + (-x) = (-x) + x = 0$$

Il numero 0 coincide con il suo opposto.
($\mathcal{M}$) Per ogni numero reale $x \neq 0$ esiste un numero reale $1/x$, chiamato **reciproco** (o inverso) di x, tale che

$$x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$$

6. Legge di cancellazione

$$(\mathcal{A}) \quad x + z = x + y \quad \Leftrightarrow \quad z = y$$

$$(\mathcal{M}) \quad x \neq 0 \quad \wedge \quad x \cdot z = x \cdot y \quad \Leftrightarrow \quad z = y$$

7. Proprietà dello zero (per l'addizione coincide con la proprietà dell'elemento neutro)

$$(\mathcal{A}) \quad x + 0 = 0 + x = x \qquad\qquad (\mathcal{M}) \quad x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$$

8. **Legge di annullamento del prodotto**

$$x \cdot y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad y = 0$$

Qualche commento su queste proprietà. La proprietà commutativa ci dice che non conta l'ordine con il quale addizioniamo o moltiplichiamo due numeri reali; analogamente la proprietà associativa ci mostra che il modo in cui vengono raggruppati i numeri reali quando devono essere sommati o moltiplicati non ha importanza. La proprietà distributiva è fondamentale quando si vuole trasformare un prodotto in una somma e viceversa (scomposizione in fattori).
Le ultime tre proprietà possono essere derivate dalle precedenti ed hanno un ruolo fondamentale nel calcolo algebrico; in particolare la proprietà indicata in grassetto, sebbene possa sembrare intuitiva e molto semplice, ha un'importanza decisiva nella risoluzione delle equazioni. Supponiamo di trovarsi di fronte ad una semplice equazione di primo grado nel campo dei numeri reali:

$$5\,x = 0$$

Qual è quel valore dell'incognita x che rende vera l'uguaglianza precedente? Per rispondere è sufficiente pensare alla legge di annullamento del prodotto concludendo che l'unica possibile soluzione è $x = 0$; se vale infatti tale legge non è possibile trovare nessun numero diverso da 0 che moltiplicato per 5 dia come risultato 0. Facciamo un altro esempio: supponiamo di dover risolvere l'equazione

$$(1 - x^2)\,(x - 7)\,(x + 3)\,(2 - x) = 0$$

Se il risultato di un prodotto di più fattori è nullo, allora significa che almeno uno dei fattori deve valere zero. Poiché ci interessa trovare **tutte** le soluzioni, sarà sufficiente trovare i valori di x che annullano ciascun fattore: nel nostro esempio si trova facilmente $x = \pm 1, 7, -3, 2$.

1.3.2 Valore assoluto

Il valore assoluto (o modulo) di un numero è un concetto di fondamentale importanza, da comprendere a fondo. Iniziamo con la definizione.

Definizione 7. *Per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *si pone*

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

$|x|$ *si dice* **valore assoluto***, o* **modulo** *del numero reale* x*.*

In sostanza $|x|$ è uguale a x stesso se il numero è positivo o nullo, altrimenti, se x è negativo, è l'opposto; quindi $|x| \geq 0 \; \forall \, x \in \mathbb{R}$. Ad esempio:

$$|7| = 7 \quad |-2\,\pi| = 2\,\pi \quad |\sqrt{13} - 3| = \sqrt{13} - 3 \quad |2 - \pi| = \pi - 2$$

Se

$$|x| < a \quad (|x| \leq a)$$

con $a > 0\,(a \geq 0)$, significa che x può assumere tutti i valori reali compresi tra a e $-a$:

$$-a < x < a \quad (-a \leq x \leq a)$$

Si dice anche che il numero x è "in modulo" minore di a.
Se invece si ha $(M > 0)$

$$|x| > M \quad (|x| \geq M)$$

significa che x può assumere tutti i valori maggiori di M o minori di $-M$:

$$x > M \quad \vee \quad x < -M \quad (x \geq M \quad \vee \quad x \leq -M)$$

si dice anche che il numero x è "in modulo" maggiore di M.

1.3.3 Radicali

Se n è un intero positivo ed x è un numero reale, allora ogni numero reale y tale che $y^n = x$ viene detto **radicale *algebrico* n-esimo** di x (o di **indice** n); con **radicale *aritmetico* n-esimo** di x si intende il numero reale **non negativo** tale che la sua potenza n-esima sia uguale a x.
Ci sono differenze tra i due radicali solo quando l'indice della radice è pari, questo perché elevando un numero o il suo opposto ad un esponente pari si ottiene lo stesso risultato. In generale, se non esplicitamente espresso, il simbolo $\sqrt[n]{x}$ indica sempre il radicale aritmetico del numero x: se n è pari il risultato dell'estrazione della radice è un numero non negativo. Le radici n-esime di x quando $n = 2$ e $n = 3$ sono dette rispettivamente **radice quadrata** e **radice cubica** di x. Una radice di indice pari si può calcolare in $\mathbb{R}$ se e solo se il numero sotto radice (detto **radicando**) è non negativo (una radice di indice pari di un numero negativo appartiene a $\mathbb{C}$, ma non a $\mathbb{R}$); se invece la radice è di indice dispari può essere sempre calcolata, qualunque sia il radicando.

Siano $x, y \in \mathbb{R}_0$ (con $\mathbb{R}_0$ indichiamo l'insieme dei numeri reali diversi da 0) e $m, n, k \in \mathbb{N}$. Supponendo definite tutte le espressioni, si ha

a) $\sqrt[n]{x\,y} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$

b) $\sqrt[n]{x/y} = \sqrt[n]{x}/\sqrt[n]{y}$

c) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m\,n]{x}$

d) $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$

e) $\sqrt[2\,k]{x^{2\,k}} = |x|$

f) $\sqrt[2\,k+1]{x^{2\,k+1}} = x$

g) $\sqrt[2\,k]{x^{2\,k+m}} = |x|\,\sqrt[2\,k]{x^m}, \quad m < 2\,k$

h) $\sqrt[2\,k+1]{x^{2\,k+1+m}} = x\,\sqrt[2\,k+1]{x^m}, \quad m < 2\,k+1$

Nelle proprietà e) e g) compare il valore assoluto di x in quanto, come detto precedentemente, stiamo parlando di radicali aritmetici ed il risultato dell'estrazione di una radice di indice pari (con radicando non negativo) è sempre un numero non negativo. Tanto per chiarire vale $\sqrt{x^2} = |x|$.

1.3.4 Proprietà delle potenze

Esponenti interi
Siano x e y dei numeri reali diversi da 0, m ed n interi positivi. Elevare il numero x alla potenza m significa moltiplicare x per se stesso m volte: ricorda che $x^0 = 1$ per ogni valore x. Le proprietà fondamentali che devi saper utilizzare senza esitazione sono qui riassunte:

a) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

b) $x^m : x^n = x^{m-n}$

c) $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$

d) $(x\,y)^m = x^m\,y^m$

e) $(x/y)^m = x^m/y^m$

f) $x^{-m} = 1/x^m$

L'ultima proprietà ci permette di estendere l'elevamento a potenza ad esponenti interi negativi; in particolare devi ricordare che elevare alla -1 significa fare il reciproco del numero:

$$3^{-1} = \frac{1}{3} \qquad \left(\frac{27}{13}\right)^{-1} = \frac{13}{27}$$

Esponenti razionali

È possibile estendere il concetto di potenza ad esponenti razionali. Dati un intero m, un intero positivo n e supposto $x > 0$ si ha che

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \tag{2}$$

Facciamo qualche esempio:

$$7^{2/3} = \sqrt[3]{49} \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{3/5} = \sqrt[5]{\frac{1}{27}} \qquad 3^{2/4} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$$

Affinché la potenza reale $x^{m/n}$ sia definita per qualunque frazione m/n, la base x deve essere una quantità positiva. Ad esempio, il numero $(-2)^{1/4}$ non appartiene ad $\mathbb{R}$ in quanto, in accordo con la relazione (2), avremmo

$$(-2)^{1/4} = \sqrt[4]{-2}$$

ma come ben sai in $\mathbb{R}$ non è possibile calcolare la radice quarta (in generale di indice pari) di un numero negativo. Esistono comunque potenze con base negativa ed esponente razionale, ad esempio

$$(-5)^{1/3} = \sqrt[3]{-5} \qquad \left(-\frac{1}{7}\right)^{2/5} = \sqrt[5]{\frac{1}{49}}$$

Per gli esponenti razionali valgono le stesse proprietà viste per gli esponenti interi.

1.3.5 Percentuali

Le percentuali si usano per confrontare due quantità dello stesso tipo, evidenziando che una delle due è una certa frazione dell'altra. Una percentuale, infatti, non è altro che una frazione con denominatore uguale a 100 (e numeratore non necessariamente intero). Cosa significa prendere una percentuale $i\%$ di una data quantità N? Semplicemente moltiplicare N per $i/100$.
Ad esempio, supponiamo che la popolazione di una città sia diminuita del 20% nel 2015, in quale percentuale dovrebbe aumentare nel 2016 per tornare alla numerosità di partenza?
La risposta non è chiaramente 20%. Immaginiamo che la popolazione della città in esame, all'inizio del 2015, fosse composta da N individui. Se nel 2015 cè stata una diminuzione del 20% significa che all'inizio del 2016 il numero di individui è

$$N - \frac{20}{100}\,N = \frac{80}{100}\,N$$

Per tornare ad essere N, la popolazione nel 2016 deve aumentare di $(20/100)\,N$ (su un totale di $(80/100)\,N$) per cui l'aumento percentuale deve essere

$$\frac{(20/100)\,N}{(80/100)\,N} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$$

Vediamo un altro esempio. Un cucciolo di border collie pesa 8 kg, dopo il primo mese il suo peso aumenta del 25% e tale incremento si registra anche nel secondo mese. Quanto vale l'incremento totale del peso del cucciolo nei due mesi?
Se il peso iniziale è 8 kg, con un aumento del 25% il cucciolo andrà a pesare $8+2=10$ kg dopo il primo mese; nel secondo mese il cucciolo aumenterà ancora il suo peso del 25% del peso iniziale del mese, ovvero di 10 kg, arrivando a pesare $10+2.5=12.5$ kg. In conclusione, dopo due mesi, il peso del cucciolo è aumentato di 4.5 Kg sugli 8 Kg di partenza, ovvero c'è stato un incremento del 56.25%. In generale, se indichiamo il peso con la lettera p e la percentuale di incremento con i otteniamo che l'incremento è dato da

$$\frac{i}{100}\cdot p$$

mentre il peso aumentato è dato da

$$p+\frac{i}{100}\cdot p=p\left(1+\frac{i}{100}\right)$$

Per ottenere il peso dopo il primo mese dobbiamo moltiplicare quindi il peso iniziale per il fattore $(1+i/100)$; per il secondo aumento dobbiamo ancora moltiplicare per lo stesso fattore:

$$\left[p\left(1+\frac{i}{100}\right)\right]\left(1+\frac{i}{100}\right)=p\left(1+\frac{i}{100}\right)^2$$

Lo stesso procedimento si può applicare ripetutamente: ad esempio dopo n mesi si ottiene

$$p\left(1+\frac{i}{100}\right)^n$$

L'espressione ottenuta non è altro che una **legge esponenziale**.

1.3.6 Approssimazioni

Abbiamo visto come i numeri razionali abbiano uno sviluppo decimale finito, ad esempio

$$\frac{19}{7}=2.714285714\ ,$$

oppure decimale periodico

$$\frac{19}{9}=2.\overline{1}\ ,$$

I numeri reali non razionali (irrazionali) hanno invece uno sviluppo decimale infinito non periodico. Se però dobbiamo utilizzare tali numeri nei calcoli siamo costretti a fare delle approssimazioni. Ad esempio, se volessimo calcolare l'area di una circonferenza di raggio $r=1$ m, dovremmo scrivere

$$\mathcal{A}=\pi\, r^2=\pi\quad \mathrm{m}^2$$

con

$$\pi=3.14159265358979323846\ldots$$

Se approssimiamo per **troncamento** alla quarta cifra decimale il valore di π otteniemo

$$\pi \simeq 3.1415$$

mentre se approssiamo per arrotondamento sempre alla quarta cifra decimale si ha

$$\pi \simeq 3.1416$$

Il troncamento di un numero reale alla k-sima cifra decimale consiste nel dimenticarsi le cifre decimali successive alla k-sima. Si introduce in questo modo un errore che può variare da 0 fino a 10^{-k}.
L'arrotondamento di un numero reale alla k-sima cifra cifra decimale consiste nel procedere come per il troncamento se la $k+1$-sima cifra è $0, 1, 2, 3, 4$ (**approssimazione per difetto**). Se invece la $k+1$-sima cifra è $5, 6, 7, 8, 9$, si aumenta di uno la k-sima cifra (**approssimazione per eccesso**), eliminando poi tutte le cifre successive alla k-sima. Si introduce in questo modo un errore che può variare da 0 fino ad un massimo di $5 \times 10^{-(k+1)}$.

1.4 Notazione scientifica

Spesso nelle applicazioni della matematica ci si trova di fronte a numeri molto grandi, come la massa della Terra in Kg, o molto piccoli, come il raggio dell'elettrone in metri. Per scrivere questi numeri in forma compatta vengono utilizzate le potenze intere del 10; se consideriamo la massa M_E della Terra si ha

$$M_E = 5.9742 \times 10^{24} \text{ kg}$$

In generale, un numero reale x è espresso in **notazione scientifica** se è nella forma

$$x = m \times 10^n$$

dove n è un intero e m è un numero reale tale che

$$1 \leq |m| < 10$$

Questa notazione compatta permette di svolgere più rapidamente i calcoli facendo uso delle proprietà delle potenze.

1.5 Errori di misura

Il processo di **misura** è alla base di tutte le scienze sperimentali. Misurare una grandezza (per esempio la lunghezza di un insetto) significa fissare un'unità di misura e vedere "quante" volte essa è contenuta nella grandezza data. Il risultato ottenuto non può essere interpretato come verità assoluta, in quanto ogni misura è affetta da errori. Tali errori possono essere suddivisi in due categorie:

1. **errori sistematici**, che derivano da difetti strumentali o dall'applicazione di formule sbagliate;

2. **errori casuali**, inevitabilmente legati ad ogni procedimento di misura, dipendenti, ad esempio, da chi effettua la misura.

Gli errori sistematici sono sempre nello stesso verso, o per eccesso o per difetto, mentre quelli casuali possono presentarsi in entrambi i versi.
Vediamo con un esempio come sintetizzare l'informazione derivante da una serie di misure. Supponiamo che sia stato trovato un esemplare di lombrico di cui è stata misurata la sua lunghezza quattro volte ottenendo i seguenti valori in cm: 8.52, 8.51, 8.57, 8.56.
Per prima cosa è necessario assegnare un **valore stimato** alla lunghezza del lombrico, utilizzando la media aritmetica delle misure effettuate:

$$l_s = \frac{8.52 + 8.51 + 8.57 + 8.56}{4} = \frac{34.16}{4} = 8.54$$

Possiamo determinare un **errore assoluto** della misura pari alla metà dell'intervallo di misurazione. Essendo le misurazioni comprese nell'intervallo $[8.51, 8.57]$ l'errore assoluto vale

$$\epsilon_a = \frac{8.57 - 8.51}{2} = 0.03 \text{ cm}$$

Da notare che l'errore assoluto ha la stessa unità di misura delle misure. Possiamo quindi asserire che la lunghezza del lombrico è

$$l = l_s \pm \epsilon_a = 8.54 \pm 0.03$$

Per capire la bontà di una misurazione è più utile però determinare l'**errore relativo**, rapporto tra l'errore assoluto ed il valore stimato:

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon_a}{l_s} = \frac{0.03}{8.54} \simeq 0.35\%$$

Più piccolo è l'errore relativo e più accurata può considerarsi la misura.

1.5.1 Propagazione dell'errore in misure indirette

Vediamo adesso come si propagano gli errori quando si eseguono operazioni tra più misure, ciascuna delle quali è affetta da un errore.
Quando si ha a che fare con somme e sottrazioni di grandezze si deve utilizzare l'errore assoluto (si fa sempre la somma degli errori assoluti), mentre nel caso di moltiplicazioni e divisioni l'errore relativo (si fa sempre la somma degli errori relativi).
Supponiamo di aver misurato i due lati di una lamina metallica rettangolare con i seguenti risultati (espressi in metri):

$$x = 1.25 \pm 0.05 \qquad y = 2.50 \pm 0.05$$

Il perimetro della lamina avrà allora un valore stimato pari a $2p_s = 2\,(x_s + y_s) = 7.50$ metri ed il suo errore assoluto sarà dato dalla somma degli errori assoluti dei quattro lati, $\epsilon_a^{2p} = 2\,(\epsilon_x + \epsilon_y) = 2\,(0.05 + 0.05) = 0.20$ metri. In conclusione

$$2p = 7.50 \pm 0.20$$

con un errore relativo pari a $\epsilon_r^{2p} = 0.20/7.50 \simeq 2.7\%$.
Se di questa lamina volessimo calcolare l'area potremmo usare (visto che gli errori relativi dei lati sono piccoli, minori del 10%) come valore stimato il prodotto $\mathcal{A}_s = x_s\, y_s = 3.1250$ m^2. Per l'incertezza sull'area dobbiamo sommare gli errori relativi

$$\epsilon_r^x = \frac{0.05}{1.25} = 4\% \qquad \epsilon_r^y = \frac{0.05}{2.50} = 2\%$$

ottenendo l'errore relativo sull'area

$$\epsilon_r^{\mathcal{A}} = \epsilon_r^x + \epsilon_r^y = 2\% + 4\% = 6\%$$

L'errore assoluto è allora dato da

$$\epsilon_a^{\mathcal{A}} = \epsilon_r^{\mathcal{A}}\, \mathcal{A}_s = 6\% \cdot 3.1250 = 0.1875 \text{ m}^2$$

1.6 Numeri complessi

L'insieme dei numeri complessi, indicato col simbolo $\mathbb{C}$, rappresenta un'estensione dell'insieme dei numeri reali, fatta introducendo il simbolo i che ha la proprietà di avere come quadrato il numero -1: $i^2 = -1$ o equivalentemente $i = \sqrt{-1}$.

1.6.1 Definizione e operazioni

Definizione 8. *Un numero z della forma $x + i\,y$ con $x, y \in \mathbb{R}$, si dice* **numero complesso**, *di cui x è la* **parte reale** *($x = Re(z)$) e y la* **parte immaginaria** *($y = Im(z)$).*

Vediamo come si svolgono i calcoli in $\mathbb{C}$. Supponiamo di dover calcolare $z_1 - z_2$, dove $z_1 = 2 + 3\,i$ e $z_2 = 1 - 5\,i$. La somma algebrica di due numeri complessi viene fatta con le regole del calcolo letterale, si sommano cioè tra loro monomi simili:

$$z_1 - z_2 = (2 + 3\,i) - (1 - 5\,i) = 2 + 3\,i - 1 + 5\,i = (2 - 1) + (3\,i + 5\,i) = 1 + 8\,i$$

Supponiamo adesso di dover svolgere un prodotto $z_5 \cdot z_6$, dove $z_5 = 1 - i$ e $z_6 = 2 + 3\,i$. La moltiplicazione di due numeri complessi viene fatta con le regole del calcolo letterale, ricordando che $i^2 = -1$:

$$z_5 \cdot z_6 = (1 - i) \cdot (2 + 3\,i) = 2 + 3\,i - 2\,i - 3\,i^2 = (2 - 3\,i^2) + (3\,i - 2\,i) = 5 + i$$

Se ci troviamo di fronte un rapporto tra numeri complessi, ad esempio $z_1 = (3-i)/(2+i)$, possiamo esprimerlo nella forma $x + i\,y$. Il numero z_1 rimane uguale a se stesso se si moltiplica per una frazione equivalente al numero 1, ovvero una frazione con il numeratore uguale al denominatore; se un numero complesso nella forma $x + i\,y$ viene moltiplicato per $x - i\,y$ (il suo coniugato, vedrai la definizione di coniugato nel successivo paragrafo) si ottiene il numero reale $x^2 + y^2$ (ricorda il prodotto notevole $(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$ e non dimenticare che $i^2 = -1$):

$$\frac{3 - i}{2 + i} = \left(\frac{3 - i}{2 + i}\right) \left(\frac{2 - i}{2 - i}\right) = \frac{6 - 3\,i - 2\,i + i^2}{5} = \frac{5 - 5\,i}{5} = 1 - i$$

1.6.2 Interpretazione geometrica

Consideriamo il numero complesso $z = x + i\,y$ e proviamo a rappresentare tale numero con il punto del piano cartesiano di coordinate (x, y), in modo che $Re(z)$ sia l'ascissa e $Im(z)$ l'ordinata. Abbiamo così stabilito una corrispondenza tra i punti di un piano ed i numeri complessi, allo stesso modo in cui esiste una corrispondenza tra i punti di una retta e l'insieme dei numeri reali. I punti dell'asse delle ascisse sono numeri reali $(z = x)$, mentre i punti dell'asse delle ordinate sono numeri **immaginari puri** $(z = i\,y)$. Il piano attraverso cui si rappresentano i numeri complessi è chiamato **piano complesso** o **piano di Argand-Gauss**.
Il **coniugato** del numero complesso z, indicato con $\bar{z}$, è il numero complesso che ha parte reale uguale a z e parte immaginaria opposta (ricorda che $Im(z) \in \mathbb{R}$). Ad esempio il coniugato di $z = 5 - 3\,i$ è $\bar{z} = 5 + 3\,i$; in particolare quindi se $z \in \mathbb{R}$ $(Im(z) = 0)$ allora $z = \bar{z}$, mentre se z è immaginario puro $(Re(z) = 0)$ allora $z + \bar{z} = 0$. Se moltiplichiamo un numero complesso $z = x + i\,y$ per il suo coniugato otteniamo un numero reale

$$z\,\bar{z} = (x + i\,y)\,(x - i\,y) = x^2 - (i\,y)^2 = x^2 - i^2\,y^2 = x^2 + y^2$$

Se pensiamo alla rappresentazione di un numero complesso nel piano di Argand-Gauss, si ha che tale prodotto $z\,\bar{z}$ è il quadrato della lunghezza ρ del segmento che unisce l'origine con il punto di coordinate (x, y) (pensa alla formula della distanza tra due punti o equivalentemente al teorema di Pitagora). Tale lunghezza ρ è chiamata **modulo** del numero complesso z e si indica con $|z|$; l'angolo φ formato dal segmento Oz e dal semiasse positivo delle ascisse si dice **argomento** di z $(\varphi = arg(z))$: l'argomento non è definito in modo unico, ma a meno di multipli di 2π radianti (360°). Dalle considerazioni precedenti possiamo allora dedurre che:

- $|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$;
- $z\,\bar{z} = |z|^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$;
- $|z| = |\bar{z}| \quad \forall z \in \mathbb{C}$;
- $Arg(z) = -Arg(\bar{z}) \quad \forall z \in \mathbb{C}$;
- $|z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0$;
- $|z_1\,z_2| = |z_1|\,|z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Il numero complesso z è esprimibile come funzione del modulo ρ e dell'argomento φ (notazione trigonometrica)

$$z = x + i\,y = \rho\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$$

in quanto si ha

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \end{aligned}$$

Spesso si utilizza la forma compatta (notazione esponenziale)

$$\rho\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) = \rho\,e^{i\,\varphi}$$

definendo l'esponenziale di un numero immaginario puro come

$$e^{i\,\varphi} = \cos\varphi + i\,\sin\varphi$$

Utilizzando questi formalismi, i prodotti tra numeri complessi diventano semplici: facciamo due esempi, il primo utilizzando la notazione trigonometrica, il secondo quella esponenziale. Supponiamo di voler moltiplicare tra loro i numeri

$$z_1 = 2\,\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{e} \quad z_2 = 3\,\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Il risultato è

$$z_1\,z_2 = 6\,(\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}) + i\,\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})) = 6\,(\cos(\frac{7}{12}\,\pi) + i\,\sin(\frac{7}{12}\,\pi))$$

È sufficiente cioè moltiplicare tra loro i moduli e sommare gli argomenti. Tale risultato è ancora più evidente se si pensa in termini di esponenziali, infatti

$$z_1 = 2\,e^{i\,\pi/3} \quad \text{e} \quad z_2 = 3\,e^{i\,\pi/4}$$

Per moltiplicare i due numeri è sufficiente ricordare le proprietà delle potenze (stessa base, quindi gli argomenti si sommano):

$$z_1\,z_2 = 6\,e^{i\,\pi/3}\,e^{i\,\pi/4} = 6\,e^{i\,7\,\pi/12}$$

1.6.3 Formula di De-Moivre e radici n-esime

La formula di De-Moivre esprime la potenza di un numero complesso in funzione del suo modulo e del suo argomento. Supponiamo di avere un numero complesso $z = x + i\,y$ e volerne fare una certa potenza: potremmo svolgere tutti i conti utilizzando le tecniche viste nel paragrafo iniziale, ma ciò potrebbe risultare molto lungo e noioso. Un modo più rapido è quello di utilizzare una formula, chiamata **formula di De-Moivre**, ma per farlo bisogna esprimere il numero z in forma trigonometrica:

- calcoliamo il modulo di z: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$;
- calcoliamo l'argomento di z: $\varphi = Arg(z) = \arctan(y/x)$.

Il numero z può essere allora espresso come $z = |z|\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$ e la sua potenza n-esima può essere calcolata con la formula di De-Moivre

$$z^n = |z|^n\,(\cos n\,\varphi + i\,\sin n\,\varphi)$$

La formula di De-Moivre è particolarmente utile per la ricerca delle radici n-esime di un numero. La radice n-esima di un numero a è un numero b tale che $b^n = a$. Se pensiamo

ai numeri reali il numero 1 ha due radici quadrate (1 e -1), una radice cubica (1) e due radici quarte (1 e -1); se ragioniamo nel campo complesso ci si rende facilmente conto che $(\pm i)^4 = (\pm i^2)^2 = (\mp 1)^2 = 1$, quindi il numero 1 ha due ulteriori radici quarte ($\pm i$).
Nell'insieme dei numeri complessi vi sono esattamente n distinte radici n-esime di qualunque numero. Cerchiamo un'espressione per le radici n-esime di un numero complesso $w = |w|\,(\cos\alpha + i\,\sin\alpha)$, indichiamo con $z = |z|\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$ una tale radice, quindi si ha $z^n = w$, ovvero

$$z^n = |z|^n\,(\cos(n\,\varphi) + i\,\sin(n\,\varphi)) = |w|\,(\cos\alpha + i\,\sin\alpha)\,.$$

Perché i due numeri z^n e w siano uguali devono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

- $|z|^n = |w| \quad \Leftrightarrow \quad |z| = \sqrt[n]{|w|}$
- $n\,\varphi = \alpha + 2\,k\,\pi \quad 0 \le k \le n-1 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \dfrac{\alpha + 2\,k\,\pi}{n}$

Le n radici del numero w sono allora date, al variare dell'intero k tra 0 e $n-1$ dalla seguente espressione:

$$z = \sqrt[n]{|w|}\,\left(\cos\frac{\alpha + 2\,k\,\pi}{n} + i\,\sin\frac{\alpha + 2\,k\,\pi}{n}\right) \tag{3}$$

Nel piano complesso, le n radici di un dato numero rappresentano i vertici di un poligono regolare con n lati.
Proviamo ad esempio a calcolare la radice quarta del numero

$$w = \frac{3}{2} + i\,\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Per prima cosa trasformiamo il numero w in forma trigonometrica. Calcoliamo il modulo

$$|w| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{9} = 3$$

e l'argomento

$$Arg(w) = \arctan\frac{3\sqrt{3}/2}{3/2} = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

Quindi

$$w = 3\,\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Si ha allora che le radici quarte sono

$$z_1 = \sqrt[4]{3}\,\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\sin\frac{\pi}{12}\right) \qquad z_2 = \sqrt[4]{3}\,\left(\cos\frac{7}{12}\,\pi + i\,\sin\frac{7}{12}\,\pi\right)$$

$$z_3 = \sqrt[4]{3}\,\left(\cos\frac{13}{12}\,\pi + i\,\sin\frac{13}{12}\,\pi\right) \qquad z_4 = \sqrt[4]{3}\,\left(\cos\frac{19}{12}\,\pi + i\,\sin\frac{19}{12}\,\pi\right)$$

2 Espressioni algebriche e polinomi

Un'**espressione algebrica** è un'espressione costituita da una combinazione qualsiasi di numeri e variabili, connessi tra loro tramite le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza ed estrazione di radice. Ad esempio, le seguenti sono espressioni algebriche:

$$26, \quad 2\,x - 4\,y, \quad \frac{4}{3}\,\pi\,r^3, \quad \frac{y^2 + x\,z}{y^7}, \quad \sqrt[3]{4\,t^2} + \sqrt{3}$$

La prima espressione algebrica è in realtà solo un numero, una **costante**, mentre le altre espressioni contengono, oltre a costanti, alcune **variabili** (espresse tramite lettere): sostituendo a tali variabili dei numeri si ottiene il valore dell'espressione.
Una **somma algebrica** è un'espressione algebrica costituita da più parti collegate tra loro attraverso un'addizione o una sottrazione.
Un **monomio** è un'espressione algebrica composta da una parte letterale e da un coefficiente numerico; termini che differiscono per il solo coefficiente numerico sono detti **simili** e possono essere sommati e sottratti: i monomi $2\,y^2$ e $4\,y^2$ sono simili, mentre $2\,x^4$ e $-4\,x$ non lo sono. Il **grado** di un monomio è la somma degli esponenti delle sue lettere. Ad esempio, il monomio $6\,x^1\,y^2\,z^3$ ha grado $1+2+3=6$. Se uno degli esponenti è negativo, come nel caso di $3\,y^3\,z^{-1}$, si ha a che fare con una frazione algebrica.
Un **polinomio** è una somma algebrica di monomi e quindi non appaiono variabili nei denominatori o sotto il segno di radice. Ad esempio la somma algebrica

$$3\,\frac{x}{y} - \sqrt{2\,x + y} + 1$$

non è un polinomio, mentre il **binomio** (somma algebrica di due monomi)

$$9\,x^2\,y^2 - \sqrt{3}\,y^3$$

ed il **trinomio** (somma algebrica di tre monomi)

$$y^4 + \sqrt{5}\,y^2 - x^6$$

sono polinomi nelle variabili x e y. Un termine che non contiene variabili è detto **termine noto** (o **termine di grado zero**) del polinomio ed i coefficienti numerici sono detti coefficienti del polinomio. Il massimo dei gradi dei monomi che formano un polinomio è chiamato **grado del polinomio**. Un polinomio è detto **omogeneo** se tutti i suoi termini hanno lo stesso grado. Ad esempio il polinomio $3\,x^2 + 2\,x\,y + 5\,y^2$ è omogeneo di grado 2.
Un concetto fondamentale è quello di **radice** di un polinomio: un valore $x_0 \in \mathbb{R}$ è detto radice del polinomio $p(x)$ se $p(x_0) = 0$. Il polinomio di primo grado $p(x) = 2\,x - 6$ ammette l'unica radice $x_0 = 3$. Nei successivi paragrafi dedicati alle equazioni illustreremo alcuni metodi per trovare, quando possibile, le radici reali di polinomi.

2.1 Operazioni con i polinomi

Addizione, sottrazione e moltiplicazione
Per eseguire somme e sottrazioni di polinomi si deve, per prima cosa, identificare i termini simili e poi procedere ad addizionare o sottrarre tali termini utilizzando la proprietà distributiva (ovvero si sommano e sottraggono i coefficienti numerici dei termini simili). Per moltiplicare tra loro polinomi si fa uso della proprietà commutativa della moltiplicazione e della proprietà distributiva, unitamente alle proprietà delle potenze.
Prodotti notevoli
I prodotti notevoli sono identità che consentono di svolgere più rapidamente i calcoli rispetto all'usuale applicazione delle regole del calcolo letterale; risultano inoltre molto utili nella risoluzione di equazioni e disequazioni.

- Differenza di quadrati
$$a^2 - b^2 = (a-b)\,(a+b)$$
- Quadrato di un binomio
$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2\,a\,b + b^2$$
- Somma e differenza di cubi
$$(a^3 \pm b^3) = (a \pm b)\,(a^2 \mp a\,b + b^2)$$
- Cubo di un binomio
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 \pm b^3$$

Divisione
Nell'insieme dei numeri naturali la divisione è possibile se il dividendo è un multiplo del divisore; se così non è otteniamo un resto nella divisione. Allo stesso modo si può definire la divisione tra polinomi. Consideriamo per semplicità polinomi in un'unica variabile x. Un polinomio $a(x)$ è divisibile per un polinomio $b(x)$ se esiste un terzo polinomio $q(x)$ (quoziente) tale che $a(x) = q(x)\,b(x)$. Ad esempio il polinomio
$$a(x) = x^2 - 1$$
è divisibile per il polinomio $b(x) = x + 1$ in quanto (ricorda i prodotti notevoli)
$$a(x) = x^2 - 1 = (x-1)\,(x+1) = (x-1)\,b(x)$$
Il grado del polinomio ottenuto come prodotto di due polinomi è dato dalla somma dei gradi dei polinomi fattori: quindi, se il grado di $a(x)$ è n e quello di $b(x)$ è m allora il polinomio quoziente $q(x)$ ha grado $n - m$. Naturalmente, come con i numeri naturali, è possibile eseguire la divisione tra polinomi anche se uno non è divisibile per l'altro. Dati due polinomi $a(x)$ e $b(x)$, con il grado di b minore o uguale al grado di a, si può dimostrare che è sempre possibile ottenere due polinomi $q(x)$ (quoziente) e $r(x)$ (resto) tali che
$$a(x) = q(x)\,b(x) + r(x)$$
Il grado di $q(x)$ è la differenza tra il grado di $a(x)$ e il grado di $b(x)$, mentre il grado di $r(x)$ è minore del grado di $b(x)$.

2.2 Scomposizione in fattori

Quando abbiamo più espressioni algebriche moltiplicate tra di loro, ciascuna di esse viene detta **fattore** del prodotto. Spesso, per la risoluzioni di equazioni, disequazioni e in altri tipi di problemi, si ha la necessità di trasformare una somma algebrica in un prodotto di fattori. Facciamo un semplice esempio: se dobbiamo risolvere l'equazione $4\,x^2 - 3\,x = 0$ possiamo applicare la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado, ma possiamo anche scomporre in fattori il polinomio a primo membro

$$x\,(4\,x - 3) = 0$$

e, tenendo presente la legge di annullamento del prodotto, concludere che le soluzioni sono $x = 0$ (valore che annulla il primo fattore) e $x = 3/4$ (valore che annulla il secondo fattore). Abbiamo così ricondotto la risoluzione di un'equazione di secondo grado alla risoluzione di due semplici equazioni di primo grado. Vediamo un esempio più complicato. Supponiamo di voler risolvere l'equazione polinomiale[3] di quarto grado

$$2\,x^4 - x^2 - 3 = 0$$

L'algoritmo risolutivo delle equazioni di quarto grado esiste, ma è assai complicato e spesso sconosciuto ai più. Non è detto però che un'equazione di quarto grado non possa essere risolta con altri metodi. Si nota subito che la nostra equazione contiene solo monomi di grado pari: eseguendo la sostituzione $t = x^2$ otteniamo

$$2\,t^2 - t - 3 = 0$$

ovvero un'equazione di secondo grado nella variabile t. Per risolvere quest'ultima possiamo ad esempio applicare la formula risolutiva e, avendo trovato due radici reali, ricordare che si può scomporre il trinomio di secondo grado come prodotto di due binomi di primo grado:

$$(t + 2)\,(t - 3) = 0$$

ovvero nella variabile x

$$(x^2 + 2)\,(x^2 - 3) = 0$$

Ricordando il prodotto notevole "differenza di quadrati", è adesso semplice scomporre il nostro trinomio di quarto grado nel prodotto di un binomio di secondo grado e due binomi di primo grado

$$(x^2 + 2)\,(x + \sqrt{3})\,(x - \sqrt{3}) = 0$$

e quindi, grazie alla legge di annullamento del prodotto, risolvere due semplici equazioni di primo grado ($x^2 + 2 \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} (x + \sqrt{3}) = 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad x = -\sqrt{3} \\ (x - \sqrt{3}) = 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad x = \sqrt{3} \end{aligned}$$

[3] Un'equazione è detta *polinomiale di grado k* se è della forma $p(x) = 0$, dove $p(x)$ è un polinomio in una variabile di grado k.

Definizione 9. *Un polinomio (in una o più variabili) è detto* **riducibile** *quando può essere scomposto nel prodotto di più fattori, anch'essi polinomi, tutti di grado inferiore. Un polinomio non riducibile è detto* **irriducibile**.

Il polinomio $x^2 + 2$ è irriducibile nel campo dei numeri reali[4]: è necessario specificare l'insieme numerico in cui si lavora perché la riducibilità di un polinomio dipende da esso.
Per scomporre un polinomio riducibile in fattori non esiste un metodo generale, esistono però delle tecniche che è possibile utilizzare, anche in sequenza, per arrivare alla fattorizzazione voluta. Queste tecniche, che possono essere riviste in un qualsiasi testo di Matematica per le scuole secondarie di secondo grado, sono:

- raccoglimento dei fattori comuni;
- raccoglimento parziale;
- utilizzo dei prodotti notevoli;
- utilizzo del teorema di Ruffini (si cerca una radice a del polinomio e si divide per $x - a$, scomponendo quindi il polinomio di grado n come prodotto di un binomio di grado 1 ed un polinomio di grado $n - 1$).

3 Funzioni, equazioni e disequazioni

Prima di esaminare le equazioni e le disequazioni lineari e quadratiche, introduciamo brevemente il concetto di funzione.

Definizione 10. *Dati due insiemi non vuoti A e B una* **funzione** *(o applicazione) f dall'insieme A nell'insieme B è una qualsiasi legge o corrispondenza che associa a ciascun elemento a dell'insieme A* **uno ed un solo elemento** *b dell'insieme B.*

A si dice il **dominio** e B il **codominio** di f. Per indicare un'applicazione di A in B si usa la notazione $f : A \to B$.
Se S è un sottoinsieme di A ($S \subseteq A$) si dice immagine di S mediante f e si indica con $f(S)$ il sottoinsieme di B costituito dalle immagini mediante f degli elementi di S:

$$f(S) = \{b \in B : \exists\, a \in S \text{ tale che } f(a) = b\}$$

L'insieme di tutti i valori che assume la funzione f si dice **immagine** (di A secondo f) e si indica con $f(A)$.
Un concetto fondamentale quando si parla di funzioni è quello di **grafico**. Il grafico di un'applicazione $f : A \to B$ è un sottoinsieme G del prodotto cartesiano $A \times B$ definito nel seguente modo:

$$G = \{(a, b) \in A \times B : \, b = f(a)\}$$

[4]Con questa espressione si intende che i coefficienti del polinomio appartengono tutti a $\mathbb{R}$ e che non esiste una scomposizione in fattori, anch'essa con tutti i coefficienti reali; sicuramente esiste una scomposizione in fattori nel campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$.

In questo capitolo e nell'intero volume saremo particolarmente interessati alle funzioni reali di variabile reale, ovvero $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Il grafico di tali funzioni potrà quindi essere rappresentato come una curva nel piano cartesiano.
Passiamo adesso a parlare di equazioni e disequazioni. Siano assegnate due funzioni **algebriche** $f(x)$ e $g(x)$ con dominio comune A e a valori in un insieme B: una funzione algebrica è costruita attraverso un numero finito di applicazioni delle quattro operazioni aritimetiche, dell'elevamento a potenza e dell'estrazione della radice n-esima. L'uguaglianza

$$f(x) = g(x) \tag{4}$$

si dice **equazione algebrica** nell'incognita x. Ogni numero reale $a \in A$ che soddisfa l'uguaglianza (4) si dice **soluzione** dell'equazione; l'insieme S di tutte le soluzioni costituisce l'**insieme delle soluzioni**. Risolvere un'equazione significa determinare l'insieme S. Due equazioni si dicono **equivalenti** quando hanno lo stesso insieme delle soluzioni.
Una **disequazione algebrica** nell'incognita x è una disuguaglianza del tipo

$$f(x) < g(x) \quad \text{oppure} \quad f(x) > g(x) \tag{5}$$

scritta per stabilire l'esistenza di eventuali valori $a \in A$ dell'incognita x che rendano vera la disuguaglianza numerica

$$f(a) < g(a) \quad \text{oppure} \quad f(a) > g(a)$$

e per determinare, in caso affermativo, questi valori.
Una disequazione può essere verificata per **alcuni**, **infiniti** o **nessun** valore dell'incognita. **Risolvere** disequazioni del tipo (5) significa determinare tutti e soli i valori di x che, sostituiti nel primo e nel secondo membro, trasformano la disequazione in una disuguaglianza numerica vera. I valori trovati per la x si dicono **soluzioni** della disequazione ed il loro insieme S si chiama **insieme delle soluzioni**. Come per le equazioni, due disequazioni si dicono **equivalenti** quando hanno lo stesso insieme delle soluzioni

3.1 Equazioni e disequazioni lineari

Le equazioni lineari sono le più semplici tra le equazioni polinomiali; le equazioni polinomiali sono della forma

$$p(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0 = 0 \tag{6}$$

dove $p(x)$ è un polinomio nell'unica variabile x. Si ottiene un'equazione di primo grado quando $n = 1$, cioè il polinomio $p(x)$ è di primo grado: $a_1\, x + a_0 = 0$. Per semplicità di notazione poniamo $a_1 = m$ e $a_0 = q$, in modo che la forma normale di un'equazione di primo grado sia

$$m\, x + q = 0 \tag{7}$$

Tale equazione, al variare dei coefficienti $m, q \in \mathbb{R}$, può avere una, nessuna o infinite soluzioni.

- $m \neq 0$, q qualunque
  L'equazione (7) ammette un'unica soluzione, per trovarla è sufficiente, dopo aver sommato $-q$ ad entrambi i membri, dividerli entrambi per m (per ipotesi m è diverso da 0):
  $$m\,x + q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m\,x = -q \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{q}{m}$$
- $m = 0$, $q \neq 0$
  Con un semplice passaggio è possibile ottenere
  $$0\,x = -q$$
  ma non esiste nessun numero reale che, moltiplicato per 0, dia un valore diverso da 0, quindi l'equazione non ammette soluzione.
- $m = 0$, $q = 0$
  L'equazione è equivalente a
  $$0\,x = 0$$
  e quindi esistono infiniti valori reali x che soddisfano la precedente equazione, in quanto qualunque numero reale moltiplicato per 0 dà 0.

Supponiamo di voler risolvere l'equazione $5\,(x-1) - 3\,(x-2) = 2\,x + 4$. Dobbiamo, attraverso opportuni passaggi algebrici, provare a ricondurci ad una delle forme equivalenti $m\,x + q = 0$ o $m\,x = -q$. Svolgendo le moltiplicazioni e sommando i monomi simili si ottiene

$$5\,(x-1) - 3\,(x-2) = 2\,x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 5\,x - 5 - 3\,x + 6 = 2\,x + 4$$

da cui

$$0\,x = 3\ ,$$

quindi l'equazione non ammette soluzioni.
Una disequazione di primo grado stretta (in cui si usano $<$ e $>$ e non $\leq$ e $\geq$) puó essere sempre portata in una delle due forme seguenti:

$$m\,x + q > 0 \qquad\qquad m\,x + q < 0 \tag{8}$$

A seconda del verso della disequazione ($<$ o $>$) e del valore dei coefficienti m e q si possono ottenere diversi insiemi di soluzioni.

- $m > 0$, q qualunque
  Per trovare le soluzioni delle disequazioni in (8) sommiamo ad ambo i membri $-q$ e dividiamo ambo i membri per m (possibile perché $m \neq 0$) lasciando inalterato il verso della disequazione, in quanto $m > 0$:
  $$m\,x + q > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m\,x > -q \quad \Leftrightarrow \quad x > -\frac{q}{m} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\frac{q}{m}, +\infty\right)$$
  oppure
  $$m\,x + q < 0 \quad \Leftrightarrow \quad m\,x < -q \quad \Leftrightarrow \quad x < -\frac{q}{m} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty, -\frac{q}{m}\right)$$

- $m < 0$, q qualunque
  Stavolta il coefficiente m è negativo, quindi procediamo come nel punto precedente ma invertiamo il verso della disequazione:
  $$m\,x + q > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m\,x > -q \quad \Leftrightarrow \quad x < -\frac{q}{m} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty, -\frac{q}{m}\right)$$
  oppure
  $$m\,x + q < 0 \quad \Leftrightarrow \quad m\,x < -q \quad \Leftrightarrow \quad x > -\frac{q}{m} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\frac{q}{m}, +\infty\right)$$

- $m = 0$, $q > 0$
  La disequazione $0\,x + q > 0$ ha infinite soluzioni in quanto è equivalente alla disuguaglianza $q > 0$, verificata per ipotesi; iceversa, la disequazione $0\,x + q < 0$ non ammette soluzioni.

- $m = 0$, $q < 0$
  La disequazione $0\,x + q > 0$ non ammette soluzioni in quanto è equivalente alla disuguaglianza $q > 0$, falsa per ipotesi; viceversa la disequazione $0\,x + q < 0$ ammette infinite soluzioni.

- $m = 0$, $q = 0$
  Entrambe le disequazioni strette non ammettono soluzioni in quanto $m\,x + q = 0$ per ogni x reale.

Supponiamo di voler risolvere $4\,x - 8 \leq 4 - 2\,x$. Questa disequazione non è stretta (è presente un $\leq$) quindi dovremo includere nell'insieme delle soluzioni anche le soluzioni dell'equazione $4\,x - 8 = 4 - 2\,x$. Operiamo alcuni semplici passaggi algebrici per arrivare alla forma $m\,x \leq -q$:
$$4\,x - 8 \leq 4 - 2\,x \quad \Leftrightarrow \quad 6\,x \leq 12$$
Dividendo ambo i membri per 6, senza cambiare il verso della disequazione, si ottiene
$$6\,x \leq 12 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 2$$
L'insieme delle soluzioni è $\{x \in \mathbb{R} :\ -\infty < x \leq 2\}$, che può anche scriversi come $(-\infty, 2]$ (la parentesi quadra è necessaria perché il 2 fa parte dell'insieme delle soluzioni essendo presente nella disequazione un $\leq$).

3.2 Equazioni e disequazioni quadratiche

Un'**equazione di secondo grado** o quadratica si dice scritta in forma normale se è della forma
$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \tag{9}$$
con i coefficienti a, b e c reali e $a \neq 0$ (altrimenti avremmo un'equazione lineare).

Le soluzioni di un'equazione di secondo grado possono essere calcolate attraverso la seguente formula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2\,a} \tag{10}$$

o, equivalentemente con la formula ridotta che è vantaggiosa quando b è un numero intero pari

$$x = \frac{-(b/2) \pm \sqrt{\Delta/4}}{a}$$

dove

$$\Delta = b^2 - 4\,a\,c \qquad \text{e} \qquad \frac{\Delta}{4} = \frac{b^2}{4} - a\,c = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - a\,c$$

La quantità Δ è chiamata **discriminante** dell'equazione di secondo grado ed è utile per capire quante soluzioni reali ammette l'equazione: tutto dipende dal segno di tale quantità, in quanto compare sotto una radice quadrata. Vediamo i tre casi che possono presentarsi.

- $\Delta = b^2 - 4\,a\,c > 0$: l'equazione ammette due soluzioni reali distinte.
- $\Delta = b^2 - 4\,a\,c = 0$: l'equazione ammette due soluzioni reali coincidenti, ovvero una soluzione reale con molteplicità algebrica pari a due.
- $\Delta = b^2 - 4\,a\,c < 0$: l'equazione non ammette soluzioni reali, ammette però due soluzioni complesse coniugate.

Supponiamo di voler risolvere l'equazione

$$-x^2 + 7\,x + 8 = 0$$

Applicando la formula risolutiva si ha

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4\,(-1)\,8}}{-2} = \frac{-7 \pm \sqrt{88}}{-2} = \frac{-7 \pm 9}{-2}$$

e quindi si ottengono le due soluzioni reali $x = -1$ e $x = 8$.
Le **disequazioni di secondo grado** o quadratiche sono della forma

$$a\,x^2 + b\,x + c \gtrless 0$$

dove, a meno di moltiplicazione di ambo i membri per -1 (e conseguente cambio del verso della disequazione), si può supporre $a > 0$. La prima cosa da fare è concentrarsi sull'equazione associata $a\,x^2 + b\,x + c = 0$. Si possono presentare questi tre casi (a seconda del segno del discriminante).

(a) $\Delta > 0$, esistono due soluzioni reali x_1 e x_2 (con $x_1 < x_2$) dell'equazione associata e le soluzioni della disequazione sono così fatte:

- $a\,x^2 + b\,x + c > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$;

– $a\,x^2 + b\,x + c < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < x < x_2$;

(b) $\Delta = 0$, l'equazione associata ha una soluzione reale x_1 con molteplicità algebrica due e le soluzioni della disequazione sono così fatte:

– $a\,x^2 + b\,x + c > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R} - \{x_1\}$;
– $a\,x^2 + b\,x + c < 0$ non ammette soluzioni;

(c) $\Delta < 0$, l'equazione associata non ha soluzioni reali e le soluzioni della disequazione sono così fatte:

– $a\,x^2 + b\,x + c > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$;
– $a\,x^2 + b\,x + c < 0$ non ammette soluzioni.

Supponiamo di voler risolvere la disequazione

$$\frac{5\,x^2 - 7\,x}{2} > 2\,x^2 - 6$$

Per prima cosa portiamo la disequazione nella forma $a\,x^2 + b\,x + c > 0$:

$$\frac{5\,x^2 - 7\,x}{2} > 2\,x^2 - 6 \quad \Leftrightarrow \quad 5\,x^2 - 7\,x > 4\,x^2 - 12 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 7\,x + 12 > 0$$

Risolviamo l'equazione associata $x^2 - 7\,x + 12 = 0$, la quale ha due soluzioni reali $x_1 = 1$ e $x_2 = 6$. Allora l'insieme delle soluzioni della disequazione è

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \quad x < 1 \quad \vee \quad x > 6\} \,.$$

4 Geometria analitica

4.1 La retta nel piano cartesiano

Una retta nel piano cartesiano può essere individuata univocamente attraverso un'equazione algebrica soddisfatta dalle coordinate dei punti della retta.
L'equazione

$$y = m\,x + q \qquad (m \neq 0)$$

è detta **equazione esplicita della retta**. Le rette verticali, le quali hanno equazioni del tipo $x = k$ con $k \in \mathbb{R}$, non sono descritte dalla suddetta equazione; esiste però un'equazione più generale, chiamata **equazione implicita** che, al variare dei parametri, descrive tutte le rette:

$$a\,x + b\,y + c = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R} \quad \text{con} \quad (a, b) \neq (0, 0) \tag{11}$$

Se $a \neq 0$ e $b = 0$ l'equazione (11) descrive le rette verticali, mentre se $b \neq 0$ descrive le rette che sono grafici di funzioni lineari. Supposto $b \neq 0$, per passare da (11) alla forma esplicita è sufficiente ricavare y come funzione di x:

$$a\,x + b\,y + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b\,y = -a\,x - c \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{a}{b}\,x - \frac{c}{b}$$

Nella forma esplicita $y = m\,x + q$, il numero m, chiamato **coefficiente angolare**, è strettamente connesso con la pendenza della retta; più precisamente, dati due punti qualsiasi $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ appartenenti alla retta, il coefficiente angolare è il rapporto tra la differenza delle ordinate $\Delta y = y_2 - y_1$ e la differenza delle ascisse $\Delta x = x_2 - x_1$:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Da quanto detto segue che più grande è il numero m in valore assoluto, più piccolo è l'angolo che la retta forma con l'asse delle ordinate. Se l'angolo che la retta forma con il semiasse positivo delle ascisse è acuto allora il coefficiente angolare è positivo, altrimenti è negativo.
Il numero q, chiamato **intercetta**, rappresenta l'ordinata del punto in cui la retta taglia l'asse y: tale punto ha coordinate $(0, q)$. Se $m \neq 0$ (cioè la retta non è orizzontale) esiste sicuramente un punto di intersezione con l'asse x di coordinate $(x_0, 0)$, dove x_0 è la soluzione dell'equazione di primo grado $m\,x + q = 0$.

ESERCIZIO 1. *Trova i punti di intersezione della retta r di equazione $12\,x - 6\,y - 24 = 0$ con gli assi coordinati.*

Soluzione. La retta è data in forma implicita, calcoliamo la sua forma esplicita:

$$12\,x - 6\,y - 24 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6\,y = 12\,x - 24 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2\,x - 4$$

L'intercetta vale -4, quindi il punto Q di intersezione con l'asse y ha coordinate $(0, -4)$. Per calcolare l'ascissa del punto di intersezione P con l'asse x si deve risolvere l'equazione

$$2\,x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

quindi il punto P ha coordinate $(2, 0)$.

ESERCIZIO 2. *Scrivi l'equazione della retta passante per i punti $A\,(2, 0)$ e $B\,(-2, 4)$.*

Soluzione. Per due punti distinti passa una e una sola retta, quindi restano univocamente determinati i coefficienti a, b e c dell'equazione implicita. I nostri due punti hanno ordinate diverse, quindi la retta per essi non è verticale e possiamo utilizzare l'equazione esplicita per la retta e determinare il coefficiente angolare m e l'intercetta q.
Per calcolare m applichiamo la sua definizione come rapporto tra le variazioni della coordinata y e della coordinata x passando da un punto all'altro:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 0}{-2 - 2)} = -1$$

Per calcolare l'intercetta, sfruttiamo l'informazione che la retta $y = -x + q$ passa per il punto A (avremmo potuto scegliere anche il punto B), ovvero sostituiamo ad x e y le coordinate di A e risolviamo l'equazione risultante in q:

$$0 = -2 + q \quad \Leftrightarrow \quad q = 2$$

È importante che sia chiaro il perché dell'ultimo passaggio: **un punto appartiene a una retta se e solo se le sue coordinate soddisfano l'equazione che descrive la retta**. Soddisfare l'equazione significa che, se il punto ha coordinate (x_0, y_0) e in generale ho una curva grafico di una funzione $f(x)$ allora vale l'uguaglianza $y_0 = f(x_0)$.

ESERCIZIO 3. *Scrivi l'equazione della retta con coefficiente angolare $m = 2$ e passante per il punto $P(2, 1)$.*

Soluzione. L'equazione di una retta con coefficiente angolare assegnato m e passante per un punto di coordinate (x_0, y_0) è, nel caso esplicito,

$$y - y_0 = m\,(x - x_0) \tag{12}$$

mentre nel caso implicito si ha

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) = 0 \tag{13}$$

con $-a/b = m$ (per quanto detto in precedenza i coefficienti a e b non sono unici). Nel nostro caso, l'equazione della retta è quindi

$$y - 1 = 2\,(x - 2)$$

che possiamo scrivere come $y = 2\,x - 3$. Naturalmente sarebbe stato possibile partire dall'equazione $y = 2\,x + q$ ed imporre il passaggio per il punto P per ricavare il coefficiente q.

4.1.1 Rette parallele e perpendicolari

Vediamo, attraverso un esercizio, come si calcolano le equazioni di rette parallele e perpendicolari ad una retta data.

ESERCIZIO 4. *Scrivi l'equazione della retta r passante per i punti $A\,(1, 1)$ e $B\,(-2, 4)$. Determina poi:*

a) l'equazione della retta s parallela a r e passante per il punto $C\,(1, 5)$;

b) l'equazione della retta t perpendicolare a r e passante per il punto $D\,(2, 2)$.

Soluzione. Calcoliamo il coefficiente angolare della retta passante per i punti $A\,(1, 1)$ e $B\,(-2, 4)$:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 4}{1 - (-2)} = -1$$

L'intercetta q si ricava imponendo il passaggio della retta di coefficiente angolare -1 per uno dei due punti, ad esempio il punto A:

$$y = -x + q \quad \Rightarrow \quad 1 = -1 + q \quad \Leftrightarrow \quad q = 2$$

L'equazione della retta cercata è quindi

$$y = -x + 2$$

a) Dobbiamo adesso determinare l'equazione della retta s parallela a r e passante per il punto $C\,(1, 5)$. Vale il seguente importante risultato: **i coefficienti angolari di due rette parallele non verticali sono uguali.** Quindi il coefficiente angolare di s vale -1. Conoscendo il coefficiente angolare e un punto della retta sappiamo come scrivere l'equazione di s:

$$y - 5 = -(x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad y = -x + 6$$

b) Per determinare l'equazione della retta t perpendicolare a r e passante per il punto $D\,(2, 2)$ dobbiamo sfruttare un altro fondamentale risultato: **i coefficienti angolari m_1 e m_2 di due rette perpendicolari (non parallele agli assi coordinati) sono tali che $m_1\, m_2 = -1$.** In pratica, se una retta ha coefficiente angolare m, tutte le rette a lei perpendicolari hanno coefficiente $-1/m$. Nell'esercizio la retta r ha coefficiente angolare -1, quindi le rette a lei perpendicolari (tra cui t) hanno coefficiente angolare pari a 1. Poiché t passa per $D\,(2, 2)$ la sua equazione è $y = x$ (la bisettrice del I e III quadrante).

Un altro importante risultato sul coefficiente angolare di una retta è il seguente (si veda la Sezione 5 per la definizione di tangente): **il coefficiente angolare di una retta è uguale alla tangente trigonometrica dell'angolo che la retta forma con il semiasse positivo delle ascisse.**

4.1.2 Formule utili in geometria analitica

In questo breve paragrafo saranno descritte alcune formule molto utili in geometria analitica.

Punto medio di un segmento
Supponiamo di avere due punti nel piano cartesiano $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e congiungiamoli con un segmento. Il punto medio C di tale segmento, equidistante dai due punti, ha coordinate

$$C\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \tag{14}$$

Distanza tra due punti
Dati due punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ la distanza tra loro è definita come la lunghezza del segmento che ha per estremi i due punti. Ricorda che **una distanza è sempre una quantità non negativa**. La formula della distanza tra due punti è una semplice applicazione del teorema di Pitagora:

$$d_{A,B} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \tag{15}$$

Distanza di un punto da una retta
Dato un punto $P(x_P, y_P)$ ed una retta r la distanza di P da r è definita come la lunghezza del segmento perpendicolare a r condotto da P. Se la retta ha un'equazione implicita $a\,x + b\,y + c = 0$, la distanza del punto P da r è data da

$$d_{P,r} = \frac{|a\,x_P + b\,y_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{16}$$

Se la retta r è espressa in forma esplicita $y = m\,x + q$ si ha

$$d_{P,r} = \frac{|y_P - (m\,x_P + q)|}{\sqrt{1+m^2}} \tag{17}$$

4.2 La parabola nel piano cartesiano

La parabola è una **conica** che si ottiene come sezione di un cono indefinito con un piano parallelo alla generatrice del cono. La parabola può anche essere descritta come luogo geometrico di punti di un piano .

Definizione 11. *Si dice* **parabola** *il luogo geometrico dei punti P del piano equidistanti da un punto dato F, detto* **fuoco***, e da una retta assegnata d, detta* **direttrice***, che non passa per il fuoco F.*

La distanza dei punti della parabola dal fuoco (o dalla direttrice), indicata con p, è detta **parametro** della parabola ed è l'elemento che la caratterizza. Il punto medio del segmento appartenente alla retta perpendicolare a d che congiunge il fuoco F con la direttrice è detto **vertice** della parabola. La retta perpendicolare a d e passante per il vertice (e per il fuoco) è l'**asse di simmetria** della parabola.
L'espressione analitica di una parabola con asse parallelo all'asse y è

$$y = a\,x^2 + b\,x + c \qquad a \in \mathbb{R}_0 \quad b, c \in \mathbb{R}$$

Tale parabola ha, posto $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$,

- il **vertice** nel punto
$$\left(-\frac{b}{2\,a}, -\frac{\Delta}{4\,a}\right)$$
- l'**asse di simmetria** parallelo all'asse delle ordinate e di equazione
$$x = -\frac{b}{2\,a}$$
- il **fuoco** F nel punto
$$\left(-\frac{b}{2\,a}, \frac{1-\Delta}{4\,a}\right)$$
- la **direttrice** parallela all'asse delle ascisse e di equazione
$$y = \frac{-1-\Delta}{4\,a}$$

ESERCIZIO 5. *Determina l'equazione della parabola che passa per il punto $A(1, 4)$ e ha vertice in $V(-2, 1)$.*

Soluzione. Determinare l'equazione della parabola significa trovare i tre coefficienti a, b e c. Se la parabola passa per $A(1,4)$, allora le coordinate di tale punto soddisfano l'equazione della parabola, quindi

$$a+b+c=4$$

Abbiamo così trovato una prima condizione che lega tra loro i coefficienti; ne mancano ancora due in modo da poter impostare un sistema di tre equazioni nelle tre incognite a,b,c. L'informazione sull'ascissa del vertice ci dice che

$$-\frac{b}{2\,a}=-2 \quad \Leftrightarrow \quad 4\,a-b=0$$

Inoltre deve valere

$$4\,a-2\,b+c=1$$

Per quest'ultima equazione abbiamo sfruttato il fatto che **il vertice è un punto della parabola** e quindi le coordinate del vertice soddisfano la sua equazione. Abbiamo così tre equazioni lineari e tre incognite, non resta altro che risolvere il sistema:

$$\begin{cases} a+b+c=4 \\ 4\,a-b=0 \\ 4\,a-2\,b+c=1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova l'equazione della parabola

$$y=\frac{1}{3}\,x^2+\frac{4}{3}\,x+\frac{7}{3}=\frac{1}{3}\,(x^2+4\,x+7)$$

Cosa succederebbe se, invece di considerare una direttrice parallela all'asse delle ascisse, ne considerassimo una parallela all'asse delle ordinate? Fissato il fuoco, è ancora possibile costruirsi una parabola? La risposta è affermativa e tale parabola avrà l'asse parallelo all'asse delle ascisse: è possibile ottenere una parabola di questo tipo, ad esempio, ruotando di 90° in senso orario una parabola con asse verticale oppure operando una simmetria rispetto alla retta $y=x$. Attenzione: una parabola con asse orizzontale **non è grafico di una funzione**.
Naturalmente è possibile descrivere analiticamente anche parabole con asse qualsiasi, non necessariamente parallelo agli assi cartesiani, ma la loro equazione è decisamente più complicata e qui non verrà trattata.

4.3 Circonferenza

La **circonferenza** è il luogo geometrico dei punti di un piano che hanno uguale distanza (**raggio**) da un punto dato (**centro**). Se il centro è $C(x_0,y_0)$ ed il raggio r allora l'equazione della circonferenza è

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \tag{18}$$

Sviluppando, nella precedente equazione, i quadrati dei binomi si ottiene

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2\,x_0\,x - 2\,y_0\,y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$

Posto $a = -2\,x_0$, $b = -2\,y_0$ e $c = x_0^2 + y_0^2 - r^2$ si ha che l'equazione della ciriconferenza (18) può scriversi nella forma

$$x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0 \tag{19}$$

Attenzione, però, perché non tutte le equazioni della forma precedente sono circonferenze. Ricavando r si ottiene

$$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - c} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4\,c}$$

e quindi deve valere

$$a^2 + b^2 - 4\,c > 0$$

in modo che il valore del raggio sia un numero reale maggiore di 0.

ESERCIZIO 6. *Determina centro e raggio della circonferenza $\mathcal{S}$ di equazione $2\,x^2 + 2\,y^2 + 4\,x - 6\,y + 6 = 0$.*

Soluzione. Per prima cosa notiamo che l'equazione della circonferenza dell'esercizio non è nella forma (19) in quanto i coefficienti dei termini di secondo grado non sono 1; tali coefficienti sono però uguali, quindi è possibile arrivare alla forma coluta dividendo ambo i membri per il loro valore:

$$2\,x^2 + 2\,y^2 + 4\,x - 6\,y + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 2\,x - 3\,y + 3 = 0$$

Adesso possiamo applicare le relazioni viste in precedenza:

$$a = -2\,x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = -\frac{a}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$b = -2\,y_0 \quad \Leftrightarrow \quad y_0 = -\frac{b}{2} = -\frac{(-3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$c = x_0^2 + y_0^2 - r^2 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = x_0^2 + y_0^2 - c = 1 + \frac{9}{4} - 3 = \frac{1}{4}$$

La circonferenza ha quindi centro nel punto $C(-1, 3/2)$ e raggio $1/2$.

5 Angoli e funzioni goniometriche

Definizione 12. *Un* **angolo** *è una porzione di piano delimitata da due semirette uscenti da uno stesso punto. Tali semirette sono chiamate* **lati** *dell'angolo e la loro intersezione è detta* **vertice** *dell'angolo.*

Due semirette che si incontrano in un punto definiscono in realtà due angoli, così come due rette che si intersecano ne definiscono quattro. Nel caso di semirette non parallele, i due angoli che vengono a formarsi sono detti **convesso**, quello che non contiene i prolungamenti delle semirette, e **concavo** quello che li contiene. Nel caso di semirette parallele che si incontrano in un punto dobbiamo distinguere due casi:

- se le semirette sono opposte l'angolo si dice **piatto**;
- quando le semirette sono coincidenti si ha un angolo **nullo** e un angolo **giro**: la distinzione tra gli angoli nullo e giro richiede la nozione di misura di un angolo.

La **bisettrice** di un angolo è una semiretta che lo divide in due angoli congruenti; definita la bisettrice, possiamo definire l'angolo **retto** come ciascuno dei due angoli che si ottengono dividendo un angolo piatto con la propria bisettrice.
Vediamo adesso come si misura un angolo. Per prima cosa dobbiamo definire un'unità di misura: possiamo, ad esempio, scegliere il **grado** (si usa il simbolo °), che per definizione è la trecentosessantesima parte dell'angolo giro. Data questa definizione risulta immediato che l'angolo giro misura 360°, l'angolo piatto 180° e l'angolo retto 90°.

Definizione 13. *Sia dato un angolo e sia γ la sua misura in gradi, si dice che*

- *l'angolo è* **convesso** *se la sua ampiezza è minore di quella di un angolo piatto,* $0° < \gamma < 180°$*;*
- *l'angolo è* **concavo** *se la sua ampiezza è maggiore di quella di un angolo piatto,* $180° < \gamma < 360°$*;*
- *l'angolo è* **acuto** *se la sua ampiezza è minore di quella di un angolo retto,* $0° < \gamma < 90°$*;*
- *l'angolo è* **ottuso** *se la sua ampiezza è maggiore di quella un angolo retto e minore di quella di un angolo piatto* $90° < \gamma < 180°$.

Supponiamo di avere due angoli che misurano in gradi γ e δ, si dice che

- *gli angoli sono* **complementari** *se la loro somma misura quanto un angolo retto,* $\gamma + \delta = 90°$*;*
- *gli angoli sono* **supplementari** *se la loro somma misura quanto un angolo piatto,* $\gamma + \delta = 180°$*;*
- *gli angoli sono* **esplementari** *se la loro somma misura quanto un angolo giro,* $\gamma + \delta = 360°$.

Un'altro sistema per misurare gli angoli utilizza il **radiante**. Consideriamo una circonferenza di raggio r e centro O: fissiamo un raggio OA e consideriamo un punto P mobile sulla circonferenza che, ad ogni istante, individua un arco $\overset{\frown}{AP}$ che sottende un angolo al centro $\widehat{AOP}$.

Definizione 14. *Un radiante è definito come la misura dell'angolo al centro* $\widehat{AOP}$ *quando l'arco* $\overset{\frown}{AP}$ *ha una lunghezza pari al raggio* r *della circonferenza.*

Esiste quindi una proporzionalità diretta tra la misura di un angolo in gradi (deg) e quella in radianti (rad):

$$\begin{aligned} deg &= \frac{180}{\pi}\, rad \\ rad &= \frac{\pi}{180}\, deg \end{aligned}$$

5.1 Triangoli rettangoli e funzioni goniometriche

Consideriamo un triangolo rettangolo $\overset{\triangle}{ABC}$ con angolo retto in C e due angoli complementari α e β $(\alpha + \beta = \pi/2)$ in A e B rispettivamente. Le lunghezze dei lati a, b, c soddisfano il teorema di Pitagora, ovvero $a^2 + b^2 = c^2$.
Si definisce **coseno** dell'angolo α e si indica con $\cos\alpha$ il rapporto tra la lunghezza del cateto CA adiacente ad α e la lunghezza dell'ipotenusa AB:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}$$

Si definisce **seno** dell'angolo α e si indica con $\sin\alpha$ il rapporto tra la lunghezza del cateto BC opposto ad α e la lunghezza dell'ipotenusa AB:

$$\sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c}$$

La **tangente** dell'angolo α, indicata con $\tan\alpha$, è il rapporto tra la lunghezza del cateto BC opposto ad α e la lunghezza del cateto adiacente CA:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} = \frac{a}{b}$$

La **cotangente** è il reciproco della tangente, ovvero è il rapporto tra la lunghezza del cateto CA adiacente ad α e la lunghezza del cateto opposto BC:

$$\cot\alpha = \frac{\overline{CA}}{\overline{BC}} = \frac{b}{a}$$

Ricordando le definizioni di $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$ è facile riconoscere che

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Per l'angolo β valgono relazioni analoghe:

$$\begin{aligned} \cos\beta &= \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c} \qquad \sin\beta = \frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c} \\ \tan\beta &= \frac{\overline{CA}}{\overline{BC}} = \frac{b}{a} \qquad \cot\beta = \frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

Sussistono quindi le relazioni $\cos\alpha = \sin\beta$, $\sin\alpha = \cos\beta$, $\tan\alpha = \cot\beta$: queste relazioni valgono **perché α e β sono angoli complementari**.
Dal teorema di Pitagora $a^2 + b^2 = c^2$, se dividiamo ambo i membri per c^2, otteniamo

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

ma $a/c = \sin\alpha$ e $b/c = \cos\alpha$, da cui segue la **relazione trigonometrica fondamentale:**

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{20}$$

5.2 Circonferenza goniometrica

Definizione 15. *La* **circonferenza goniometrica** *è una circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali.*

L'equazione della circonferenza goniometrica è allora $x^2 + y^2 = 1$. Sia $P(x_P, y_P)$ un punto sulla circonferenza, $P'(x_P, 0)$ la sua proiezione sull'asse delle ascisse e sia α l'angolo formato dal semiasse positivo delle ascisse e dal segmento OP. Il triangolo $P\overset{\triangle}{O}P'$ è retto in P' e l'angolo acuto in O misura α. Possiamo quindi definire il coseno dell'angolo α

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OP'}}{\overline{PO}} = \overline{OP'} = x_P$$

che corrisponde all'ascissa del punto P ($\overline{PO} = 1$), ed il seno dell'angolo α

$$\sin\alpha = \frac{\overline{P'P}}{\overline{PO}} = \overline{P'P} = y_P$$

che corrisponde all'ordinata del punto P. La naturale estensione delle funzioni goniometriche coseno e seno per angoli maggiori od uguali a $\pi/2$ si ha quindi definendo il coseno come l'ascissa del punto P, mobile in verso antiorario sulla circonferenza goniometrica, ed il seno come l'ordinata di tale punto. Il valore di tali funzioni goniometriche rimane sempre nell'intervallo $[-1, 1]$, quindi:

$$-1 \le \cos\alpha \le 1 \qquad -1 \le \sin\alpha \le 1 \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}$$

Poiché il punto P appartiene alla circonferenza goniometrica, le sue coordinate soddisfano l'equazione $x_P^2 + y_P^2 = 1$, da cui segue la relazione goniometrica fondamentale, valida per ogni angolo $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

La funzione tangente dell'angolo α risulta definita come rapporto tra il seno ed il coseno di α

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

mentre la funzione cotangente dell'angolo α risulta definita come rapporto tra il coseno ed il seno di α

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Queste funzioni, a differenza di $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$, non sono definite per qualsiasi valore reale dell'angolo, in quanto presentano un denominatore che può annullarsi; la tangente è definita sull'insieme $\{\alpha \in \mathbb{R} : \cos\alpha \neq 0\} = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \neq \pi/2 + k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, mentre la cotangente sull'insieme $\{\alpha \in \mathbb{R} : \sin\alpha \neq 0\} = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \neq k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Inoltre questa funzioni possono assumere qualsiasi valore reale.
Nella Tabella 1 sono elencati alcuni valori di seno, coseno, tangente e cotangente per angoli nell'intervallo $[0, \pi/2]$.

	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
0	1	0	0	ND
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/2$	0	1	ND	0

Tabella 1: Tabella con i principali valori delle funzioni goniometriche per angoli compresi tra 0 e $\pi/2$; ND sta per "non definita".

Nella Tabella 2 sono invece presenti i valori delle funzioni seno e coseno per angoli opposti, complementari e supplementari.

	$-\alpha$	$\pi/2 - \alpha$	$\pi - \alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$

Tabella 2: Tabella con i valori delle funzioni seno e coseno per angoli opposti, complementari e supplementari.

A Tavole di verità

Un **connettivo** lega tra loro due o più proposizioni logiche per ottenere proposizioni più complesse. Una proposizione logica è un'affermazione che descrive un fatto a cui è possibile attribuire un valore di verità attraverso un giudizio oggettivo.
I diversi connettivi logici, alcuni già incontrati in questo capitolo, sono descritti di seguito.

- **non**: esprime la negazione di una proposizione P e si indica con $\neg P$ o con $\overline{P}$; se la proposizione P è falsa, $\neg P$ è vera e viceversa.
- **e**: se si hanno due proposizioni P e Q, attraverso questo connettivo logico si costruisce una nuova proposizione che si considera vera solo se le due proposizioni P e Q sono vere; la nuova proposizione viene indicata con $P \wedge Q$.
- **o**: se si hanno due proposizioni P e Q, attraverso questo connettivo logico si costruisce una nuova proposizione che si considera vera solo se almeno una delle due proposizioni P e Q è vera; la nuova proposizione viene indicata con $P \vee Q$.
- **se ... allora ...**: corrisponde all'operazione logica di implicazione, in simboli $P \Rightarrow Q$; se si hanno due proposizioni P e Q, si forma una nuova proposizione che si considera falsa solo se P è vera e Q è falsa.
- **se e solo se**: corrisponde all'equivalenza logica; date due proposizioni P e Q, si forma una nuova proposizione che si considera vera solo se le due proposizioni sono entrambe vere o entrambe false.

Per visualizzare l'azione dei connettivi logici è possibile utilizzare le **tavole di verità** (V: proposizione vera, F: proposizione falsa):

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Tabella 3: Tavole di verità per i connettivi logici presentati.